Robert Müller

Forschen-Entdecken-Verifizieren-Beweisen mit dynamischer Geometrie

Gedanken ÜBER Grundkompetenzen

Abstract:

Zum Arbeiten mit Technologie, wie es nun auch für die Reifeprüfung im Rahmen der Typ II Aufgaben gefordert wird, stellen sich unter anderem folgende Fragen:

1. Welche Grundkompetenzen erwartet man/der Programmautor vom Benutzer des Programms? Bilden sich diese im Grundkompetenzkatalog (des bifie) adäquat ab?
2. Welche Aufgaben (im Lehrbuch) helfen/sind geeignet die notwendige Technologie-Kompetenz zu erwerben?
3. Kann/soll es dabei nur um „Grundkompetenzen" gehen?

Anhand der Lösung dreier konkreter Aufgaben (mittels GeoGebra) gibt der Vortragende (s)eine Antwort darauf.

Zur Frage 1 - Einleitung:

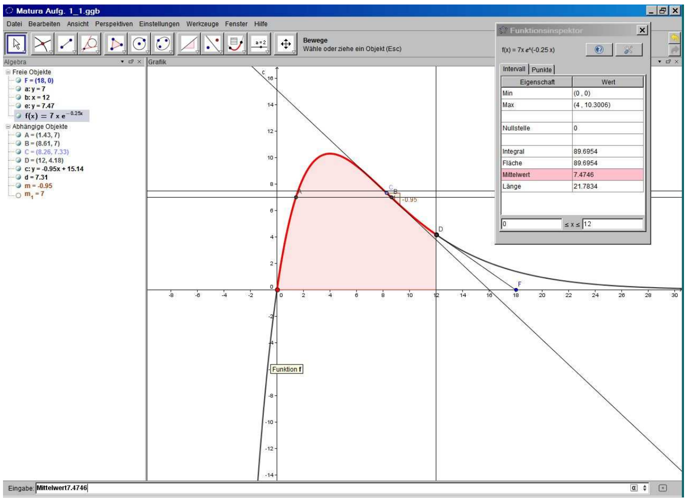
In gewisser Weise will der Vortrag eine Ergänzung zum Vortrag „Grundkompetenzen und Technologie" von M. HOHENWARTER, A. LINDNER und S. REICHENBERGER beim letztjährigen Lehrer/innen/fortbildungstag sein. Dort lag der Schwerpunkt am Erwerb von bestimmten *mathematischen* Grundkompetenzen (die aus dem Grundkompetenzkatalog zitiert wurden) durch Tätigkeiten wie Experimentieren, Simulieren, Begriffsbilden, Visualisieren und Argumentieren&Begründen mittels Technologie. Kaum eingegangen wurde auf die Frage nach dem Erwerb der (benötigten) *technologischen* Grundkompetenzen für den Erwerb eben dieser mathematischen Kompetenzen. Auch im „Praxishandbuch Mathematik AHS Oberstufe" [L1] wird im Abschnitt „Technologie auf dem Weg zur Reifeprüfung" zwar mehrfach ein „Bezug zu Grundkompetenzen des SRP-Konzeptes" hergestellt, aber wieder nur in der eben beschriebenen einen Richtung, nicht auch umgekehrt. Ein technologischer Grundkompetenz-Katalog als solcher fehlt überhaupt. Ein solcher wäre aber bei *konsequenter* Verfolgung des „Grundkompetenzgedankens" (auch als verbindliche und einschätzbare Basis bei der zentralen Prüfungsaufgabenerstellung) um nichts weniger wichtig als die Katalogisierung *mathematischer* Grundkompetenzen. Die im Abstract gestellte Frage, ob sich die technologischen Grundkompetenzen im Grundkompetenzkatalog des bifie adäquat abbilden, darf daher mit nein beantwortet werden.

Als Kritiker, ja bekennender Gegner der neuen kompetenzorientierten zentralen Reifeprüfung des *vorliegenden Stils* (vgl. meinen Vortrag „Ist die Zentralmatura die (richtige) Antwort auf zentrale Fragen des Mathematikunterrichts" am Lehrer/innen/fortbildungstag 2010) möchte ich im folgenden Vortrag – übrigens bereits meinem Sechzehnten bei dieser Veranstaltungsreihe – *nicht* der Erstellung eines solchen Katalogs das Wort reden. Ich halte schon den Versuch der Verordnung eines *zeitinvariant festgezurrten, zentralen* Katalogs als unangebracht, allein schon angesichts der Halbwertszeit technologischer Entwicklungen. Wer – wie ich – seit 1973 Informatik unterrichtete und die Entwicklung beobachtete, musste erkennen, dass sich das Problem der benötigten/verfügbaren Grundkompetenzen nur *aktuell* und *lokal* ressourcenspezifisch beantworten lässt. Kurz: jede Lehrkraft muss(te) sich für ihren Unterricht dieser Frage stellen und selbst darauf eine Antworten finden. Unterrichtet(e) sie (mittels) Computersprachen, so waren zB Kontrollstrukturen wie etwa Schleifen Grundkompetenzen: auf der Verständnis/Wissensebene als sprachunabhängiges „mentales" Konstrukt, auf der Handlungsebene als sprachabhängige, konkret zu implementierende Anweisung. Insofern spiegeln sich die technologischen Grundkompetenzen ebenso in der Syntax der verwendeten Programmiersprache ab wie in den „Menüpunkten" des verwendeten Benutzerprogramms. Hier erhält man aktuell und lokal jeweils die Antwort auf die im Abstract gestellte Frage, welche technologischen Grundkompetenzen der Programmautor vom Benutzer erwartet. Und hier gibt es große Unterschiede, sonst gäbe es nicht konzeptionell völlig verschiedene Programmiersprachtypen (wie etwa funktionale oder imperative Sprachen) und Anwenderprogrammtypen wie CAS, Tabellenkalkulation, dynamische Geometrie usw. Angesichts der knappen Redezeit will/muss ich mich hier beschränken. In den Technologie-Ergänzungen (auf Disketten, CD bis hin zum Internet) zu jenem Lehrwerk [L2], an dem ich seit 25 Jahren mitarbeite, finden Sie dazu sehr viel mehr. Hier fiel meine Wahl auf die (zunehmend sträflich vernachlässigte) Geometrie, erstens, weil sich hier die Frage nach den technologischen Grundkompetenzen unmittelbar stellt, zweitens weil „Geometrie" physiologisch lange vor Sprache und Formalismus unseren Schülerinnen und Schülern eigen und kognitiv verfügbar ist, und drittens, weil sich hier viel **Forschen-Entdecken-Verifizieren-Beweisen** lässt:

Schon 1999 meinte Bruno BUCHBERGER, einer der Informatik-Pioniere Österreichs, unter dem provokanten Titel „Mathematik am Computer: Die nächste Überforderung" [L3]:
…

Lehrer! Das heißt, dem eigenen mathematischen Entdecken und Zugang zur Mathematik sollte auch im Unterricht - bei den Schülern und Lehrern - breiter Raum gelassen werden. Am besten kann jene Mathematik vermittelt werden, die man selbst - als Lehrer - erfahren hat und erfährt. Der Lehrer kann und soll dem Schüler aber helfen, das Entdecken zu beschleunigen. Und dies natürlich um eine dramatischen Faktor: Wo stünden wir.
…

Das *beschleunigte* Entdecken verlangt (und verlangte stets) zweierlei:



Erstens *zeitökonomische* Werkzeuge, welche heutzutage zuallererst durch den Computer – ob als einfacher Taschenrechner, Handheld, Handy mit passenden Apps, (Tablet-)PC bis hin zu Großanlagen – verfügbar ist. Niemand wird abstreiten wollen, dass die verfügbaren Werk- und Denkzeuge entscheidenden Einfluss auf die Art und Weise nehmen, wie wir Probleme angehen (können) – auch wenn wir (etwa aus didaktischen Gründen) auf den Gebrauch dieser Werkzeuge temporär bewusst verzichten. Hier nehme ich auf das kostenlose und hervorragende Werkzeug GeoGebra Bezug, wie wohl ich alle die folgenden Aufgaben ebenso mittels TInspire und anderen Programmen zur dynamischen Geometrie bearbeiten hätte können.

Zweitens geeignete Problemstellungen in den (Unterrichts-)Medien, die den Kontext für passende Aufgaben und Beispiele liefern. Hier sind neben „Google", „Wikipedia" und Co. insbesondere die Lehrbücher gefordert. Naturgemäß nehme ich im Folgenden auf „mein" Lehrbuch Bezug und zeige seine Leistungsfähigkeit zu der im Abstract unter 2. gestellten Frage.

Zur Frage 2 - Drei Beispiele:

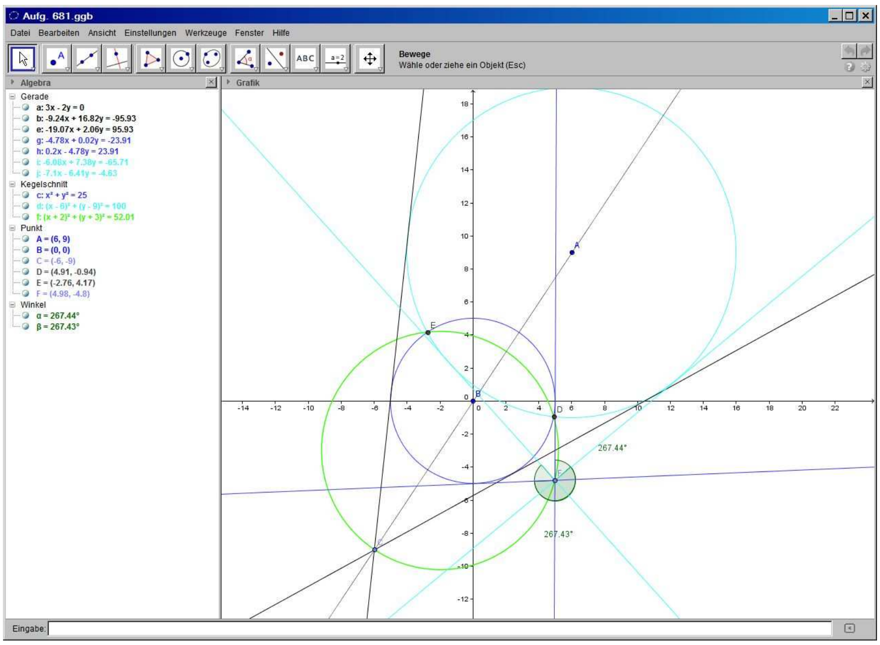
Beispiel 1: Dieses Beispiel lieferte den Anlass zu diesem Vortrag. Ich wurde zur folgenden Aufgabe aus dem Wiederholungs-Vertiefungs-Ergänzungs-Teil in unserem Lehrbuch für die 8. Klasse angefragt, wie man diese (mittels Computer) lösen könne [L2, S. 191]:

Bestimme im $\mathbb{R}^2$ die Ortslinie aller Punkte, von denen aus die beiden Kreise $k_1[M(0|0); 5]$ und $k_2[M_2(6|9); 10]$ unter gleichem Winkel erscheinen!

Wenn die zündende Idee fehlt, hilft vielleicht (Nach-)Forschen. „Nach“, weil wir wohl nicht die Ersten sind, „Forschen“, weil wir zwar methodisch vorgehen (wollen), aber noch nicht einmal eine Vermutung über das Ergebnis habe. Kurz: Wir probieren!

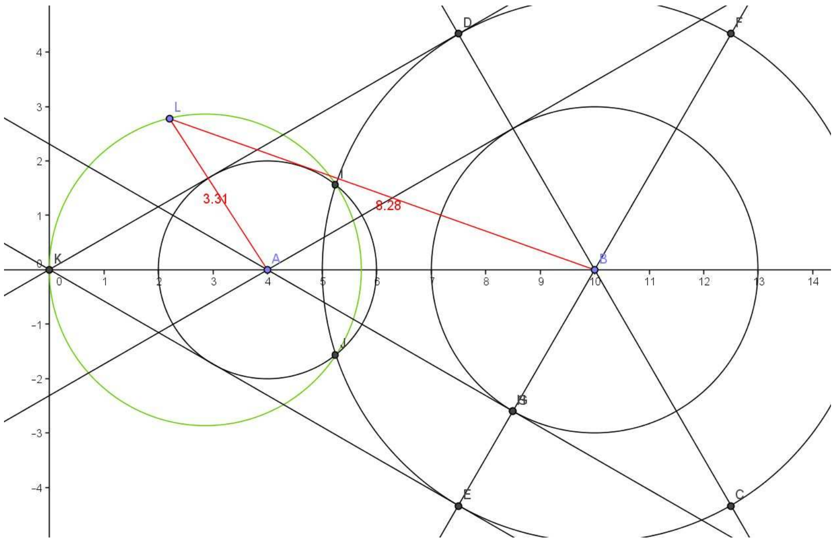
Mit Zirkel, Lineal und Bleistift ist dies sehr mühsam und zeitaufwändig, vor allem langweilig, weil stets genau die gleiche Konstruktion des Legens von Tangenten von einem Punkt an einen Kreis durchgeführt wird. Für den Unterricht ist dies eher unbrauchbar, weil diese Arbeit nicht einmal arbeitsteilig in einzelne „Threads“ aufgeteilt werden kann.

Mit dynamischer Geometrie hingegen gewinnt man recht schnell einen Punkt; man braucht die Tangenten nur *einmal* von einem beliebigen Punkt P (außerhalb beider Kreise) an den Kreis k_1 legen und P dann solange zu „ziehen“, bis die Tangenten an k_1 auch k_2 berühren. Hier kann man in Einzelarbeit oder arbeitsteilig vorgehen und über die Koordinaten alle Punkte, die von den Schülerinnen und Schülern gefunden wurden, in einer gemeinsamen (an die Tafel projizierten) Figur einzeichnen. Wir entdecken so, dass sich offenbar eine kreisähnliche Ortslinie ergibt, und stellen (gemeinsam) die Vermutung auf, dass es sich bei der gesuchten Ortslinie um einen Kreis handelt. Spätestens jetzt sollte man erkennen, dass die gesuchte Ortslinie drei ausgezeichnete Punkte enthält: die beiden Schnittpunkte von k_1 und k_2 sowie den Schnittpunkt der gemeinsamen Tangenten, der auf der Zentralen liegt. Und da sich ein Kreis aus drei Punkten konstruieren lässt, ergibt sich die Möglichkeit der Verifikation unserer Vermutung. Nun ziehen wir nicht mehr den Punkt P, sondern Teile der Angabefigur um zu sehen, ob die Vermutung auch für zwei anders liegende Kreise haltbar erscheint. Zuletzt stellt sich die Frage, ob wir die Vermutung jenseits der unvermeidlichen Ungenauigkeiten der (Computer-)Konstruktion auch beweisen können. Auch hier weist uns GeoGebra den Weg, indem es sogar die Gleichung des in Rede stehenden (Bogen eines) Kreises liefert.



Man sieht: Diese Aufgabe erlaubt in nicht trivialer Weise das Durchlaufen der BUCHBERGER'schen „vertikalen Schichten“ Forschen-Entdecken-Verifizieren-Beweisen. Das Durchlaufen dieses Weges ist das eigentliche Ziel, nicht das Wissen über die konkrete Lösung dieser speziellen Aufgabe, das wohl nur in sehr speziellen Situationen seinen Wert beweisen kann.

Wertvoll sind aber jedenfalls die Grundkompetenzen, die diese Aufgabe verlangt. Die exakte Konstruktion der Tangenten an einen Kreis (sowohl händisch wie auch am Computer) durchführen und (mit dem Satz von THALES) begründen zu können, erscheint mir eine unverzichtbare mathematische wie technologische Kompetenz zu sein. Analoges gilt für die Konstruktion eines Kreises aus drei Punkten samt Ermittlung seiner Gleichung, jedenfalls aus meiner Sicht; der Grundkompetenzkatalog des bifie ist hier mangels geforderter Lösungskompetenz von drei Gleichungen mit drei Unbekannten und der fehlenden Kreisgleichung anderer Ansicht.



Übrigens: Aus der zuerst genannten Grundkompetenz könnte (unter Bedachtnahme auf den Strahlensatz) die Einsicht erwachsen, dass die gestellte Aufgabe äquivalent mit der ist, den Ort aller Punkte zu finden, für die das Verhältnis der Abstände von zwei Punkten konstant ist. Dieser Kreis ist bekanntlich der Kreis des APOLLONIUS. Wer diesen Satz kennt und auf die gegebene Situation ummünzen kann, könnte die Aufgabe auch ohne den „Umweg“ über den vertikalen Durchstich sofort lösen.

Der didaktische Wert wäre dabei aber weitgehend auf der Strecke geblieben! Daher ist es die Aufgabe der Lehrkräfte, noch mehr aber der Hersteller von Unterrichtsmaterialien, solche Aufgaben zu (er)finden und zur Verfügung zu stellen. Wir haben dies in unserem Lehrbuch durchgehend gemacht – mit dem immer wieder gehörten Vorwurf eines zu dichten, übervoll gepackten Buches. Dem kann nur entgegengehalten werden: Wer jedem etwas bieten will, muss vieles bieten, und das geht nicht mit mageren, nur auf Grundkompetenzen ausgerichteten Büchern! Dies mag auch erklären, warum etwa Aufgaben wie die folgenden nach wie vor in unserem Lehrbuch [L2, S. 191] enthalten sind.

Verifiziere für das Dreieck ABC[A(0|−10), B(24|0), C(0|0)]: Die drei Verbindungsstrecken der Eckpunkte mit den Berührpunkten des Inkreises auf den Gegenseiten schneiden einander in einem Punkt G (**GERGONNE'scher Punkt**).

Verifiziere für das Dreieck ABC: (1) Die drei Verbindungsstrecken der Eckpunkte mit den Berührpunkten der Ankreise auf den Gegenseiten schneiden einander in einem Punkt N (**NAGEL'scher Punkt**). (2) Der Inkreismittelpunkt I, der Schwerpunkt S und der NAGEL'sche Punkt N liegen auf einer Geraden und es gilt: $\overline{NS} = 2 \cdot \overline{SI}$

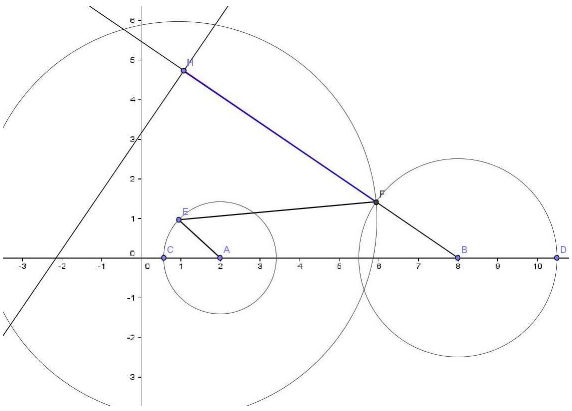
a) A(0|−10), B(24|0), C(0|0) b) A(−3|−5), B(9|4), C(−3|9)

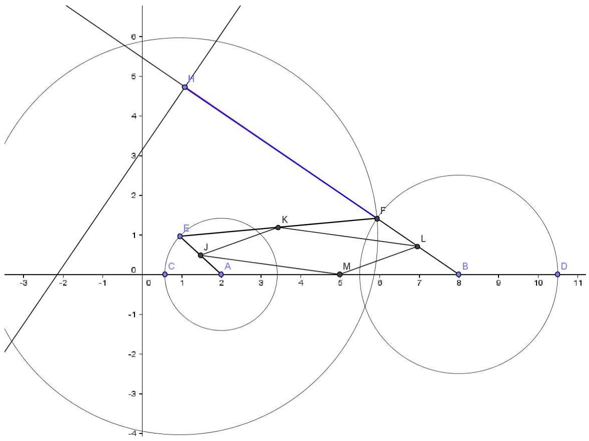
Beispiel 2: Entdeckungen sind nicht zwangsläufig erst das Ergebnis von (Nach-)Forschungen, sondern können spontan erfolgen. Solche spontane Entdeckungen kann man im Unterricht anregen und daraus erst Fragestellungen „entstehen lassen“. Die Initialzündung könnte etwa durch Vorlage folgender zwei Fotos passieren und das folgende Gespräch nach sich ziehen:

Was siehst du?
(Nichteuklidische) Spiegelbilder auf der Windschutzscheibe und Kühlerhaube von Autos.
Das ist hier nicht von Interesse. Was siehst Du noch? Schau dir die Ausschnittvergrößerungen an!

Es geht offenbar um die Scheibenwischer.
Ja. Vergleiche derer Mechanismus! Was fällt dir auf? Skizziere den jeweiligen Mechanismus!

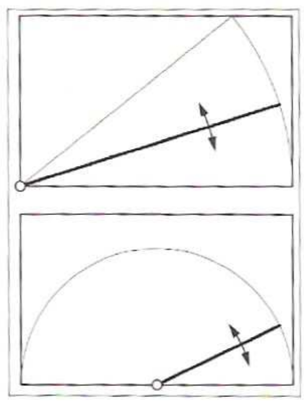
Entdecken impliziert im Gegensatz zu Erfinden, dass es das Ding schon gibt. Entdecken bedeutet aber nicht zwingend, dass man die „Natur“ des Dings richtig gesehen/interpretiert hat. Im vorliegenden Fall etwa kann man nun das (tatsächlich oder nur vermeintlich) entdeckte Gelenkviereck mittels dynamischer Geometrie „nachbauen“. Das ist zeitökonomischer und wesentlich flexibler als dies (noch mit dem Matador-Baukasten) in den ersten Jahren meiner Unterrichtstätigkeit möglich war. Hier kann man nun „Vierecksgeometrie“ in einem sinnvollen Kontext betreiben und (wahrscheinlich) Unerwartetes entdecken und beweisen – wie die Existenz und das Verhalten überschlagender Vierecke oder dass ein Stabilisierungsviereck mit Ecken in den Seitenhalbierungspunkten eine besondere Gestalt haben kann.





Was soll dieses Beispiel lehren: Prüfungsaufgaben und Lernaufgaben sind zweierlei. Wenn also die neue zentral gestellte schriftliche Matura bei den Typ-1 Aufgaben ganz konkrete Fragen einzeln (ausschließlich aus dem Grundkompetenzkatalog) und bei den Typ-2 Aufgaben innerhalb eines vorgegeben Kontextes „verzahnt“ stellt, so ist die alles beherrschende Vorgabe die, dass die Lösung/Antwort leicht korrigier- und bewertbar sein muss. Von dem, was während des Lernprozesses wirklich an Kompetenzen erworben wurde, wird vieles als nicht abprüfbar ausgeklammert. Noch schlimmer: Da beim *zentralen* Erstellen der Aufgaben die *lokalen* Lehrpfade unbekannt sind, können keine zum obigen Problemkreis passendes Maturaaufgabe *gezielt* gegeben werden, obwohl dies hier leicht möglich wäre, wie die folgende Aufgabe 1166 aus der „Vorbereitung auf den 2. Teil der schriftlichen Reifeprüfung“ aus dem Band für die 8. Klasse unseres Lehrbuches zeigt [L2, S. 273]:

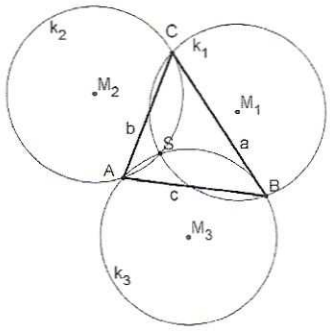
Auf einer rechteckigen Glasscheibe von 80 cm Breite und 50 cm Höhe will man einen Wischerarm so anbringen, dass eine möglichst große Fläche gereinigt wird. Die Figur zeigt zwei Varianten mit einem 80 cm und einem 40 cm langen Wischerarm. Man überlegt zwei weitere Varianten mit einem 50 cm langen Wischerarm: a Der Drehpunkt des Wischerarms ist der Mittelpunkt einer Breitseite. Welche größtmögliche Fläche A_1 kann dieser Wischer maximal reinigen? Skizziere sie und berechne ihren Flächeninhalt! b Der Drehpunkt des Wischerarms liegt 10 cm rechts vom Mittelpunkt der Breitseite. Welche größtmögliche Fläche A_2 kann dieser Wischer maximal reinigen? Skizziere sie und berechne ihren Flächeninhalt! c Auf dem 50 cm langen Wischarm wird eine Wischlippe von 45 cm Länge angebracht. Warum sollte man sie „außen“ (weg vom Drehpunkt) anbringen? Begründe! Ändert die Wischlippe etwas daran, welche Variante die bessere ist? Begründe!



So verliert ein individueller, verantwortungsvoll geplanter Unterricht seinen Freiraum und seinen Wert. Letztlich wird die Beschränkung auf die (mageren) Inhalte des Grundkompetenzkatalogs gefordert werden („Entrümpeln des Unterrichts und der Bücher“) und – wie ich glaube, mit fatalen Folgen – auch tatsächlich erfolgen. Der Untertitel meines Vortrags heißt nicht ohne Grund metaphorisch „Gedanken ÜBER Grundkompetenzen“!

Beispiel 3: Dieses Beispiel soll zeigen, dass Aufgaben vom „Lerntyp“ mit etwas konkreterer Fragestellung durchaus auch bei schriftlichen Reifeprüfungen gegeben werden könnten. Es handelt sich um das Faksimile einer Aufgabe, die meine Kollegin H. GANGL (und E. BURDIS) an meiner Stammschule im Jahr 2012 zur Klausur stellte [L4]:

3.) Unter den Johnson-Kreisen eines Dreiecks versteht man drei Kreise mit gleichem Radius, die durch jeweils zwei Eckpunkte des Dreiecks gehen und einen Punkt gemeinsam haben (siehe nebenstehende Skizze).
Das von den Mittelpunkten M_1, M_2 und M_3 dieser Kreise gebildete Dreieck wird als Johnson-Dreieck bezeichnet.



a) Zeige, dass die Kreise k_1, k_2 und k_3 die Johnson-Kreise des Dreiecks ABC sind.
b) Verifiziere, dass der gemeinsame Punkt der Johnson-Kreise der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC ist.
c) Das Dreieck ABC und das Johnsondreieck $M_1M_2M_3$ sind kongruent. Beweise diese Behauptung!

$A(-7/-4)$, $B(8/-1)$, $C(-4/7)$

k_1: $x^2 + y^2 - 8x - 12y = 13$ $\quad$ k_2 : [$M_2(-11/3)$, $r = \sqrt{65}$]

k_3: $(x-1)^2 + (y+5)^2 = 65$

Zu Frage 3 - Resümee:

Es ließen sich hier noch viele andere Beispiele geben, die zeigen, dass man selbst einfach formulierbare (aber rechnerisch „schwierig“ lösbare) Probleme wie das folgende Leiterproblem [L5] über eine (physikalisch lösbare) Optimierungsaufgabe [L6, S. 230f] bis hin zu Beweis-Aufgaben der internationalen mathematischen Olympiade 2012 [L6, S. 217] mit Mitteln der dynamischen Geometrie „leicht“ lösen könnte – wobei man sich der (anspruchsvollen) Frage widmen muss, ob ein „numerischer“ Vergleich durch das Programm oder erst ein algebraischer Vergleich (der Objekt-Gleichungen mittels CAS) als „Beweis“ akzeptiert werden darf.

Das Problem. Eine Leiter von 5 m Länge wird an eine senkrechte Wand gelehnt. Vor der Wand steht eine Kiste, die 1 m breit und 1 m hoch ist. Wie weit ist die Leiter von der Wand entfernt und wie hoch reicht sie, wenn sie die Kiste berührt? Gesucht sind also die in Abb. 1 bezeichneten Größen $\overline{OA} = x$ und $\overline{OB} = y$.

Seien A, B, C, D die Ecken eines konvexen Vierecks (in der Ebene). Wir suchen den Punkt P im Viereck, der die Summe der Abstände $PA + PB + PC + PD$ minimiert. Es gilt (die klassische Aussage)

P ist der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD.

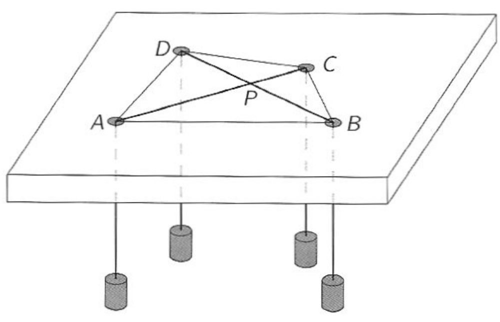
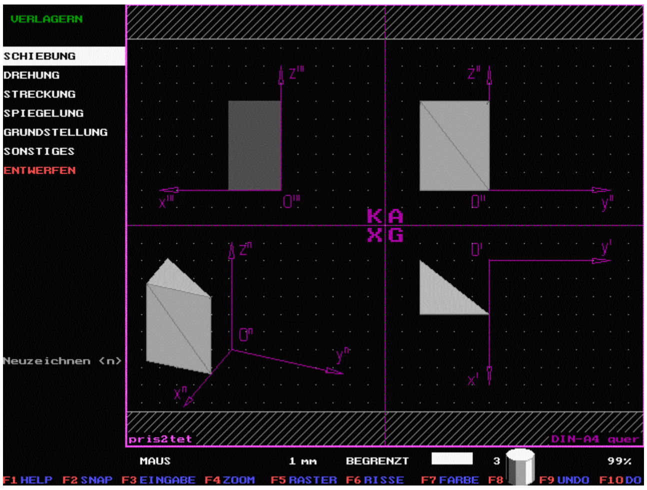


Abbildung 5. *Minimale potenzielle Energie*

5. Es seien ABC ein Dreieck mit $\sphericalangle BCA = 90°$ und D der Höhenfußpunkt der Höhe durch C. Sei X ein innerer Punkt der Strecke CD. Es bezeichne K den Punkt auf der Strecke AX, für den $|BK| = |BC|$ gilt. Entsprechend bezeichne L den Punkt auf der Strecke BX für den $|AL| = |AC|$ gilt. Schließlich bezeichne M den Schnittpunkt von AL und BK. Man beweise: $|MK| = |ML|$.
(Tschechien)

Neben den in solchen Aufgaben benötigten mathematischen und technologischen Grundkompetenzen gibt es auch Grundkompetenzen, die nicht der Lösung einer Aufgabe, sondern deren Visualisierung (statisch oder animiert) dient. Dazu zwei Beispiele, eines zur „Kurvendiskussion“, wo man die Besonderheit der Wendetangente animiert (vgl. die Figur auf der zweiten Seite dieses Vortrags), ein zweites zur *animierten* Zerlegung eines Prismas in drei volumensgleiche Pyramiden zur „Herleitung“ der Formel für das Pyramidenvolumen. Letzteres beweist anhand des dazu verwendeten Uralt-Programms CAD-3D, dass solche „Grundkompetenzen“ schon lange vor der aktuellen Kompetenzmodewelle verlangt und erworben wurden.



Leider wird es Aufgaben wie diese letzten wahrscheinlich, die obigen Beispiele 1 bis 3 in Zukunft – jedenfalls bei der schriftlichen Matura – nicht mehr geben (dürfen), weil das Wissen und der Gebrauch der Kreisgleichung nach Meinung des bifie keine mathematische Grundkompetenz darstellt. Dass nebenbei auch ganz zentrale mathematische Kompetenzen wie das Wissen um die Kongruenz von Dreiecken (Kongruenzsätze SSS, SWS usw.), bewegliche Vierecke usw. aus interessanten Kontexten und unterrichtstauglichen Beweisketten herausgerissen werden, dass dabei gerade die besten Lehrkräfte in hohem Maße demotiviert werden, ist der (zu hohe) Preis für eine (politisch motivierte) Entwicklung, die in letzter Konsequenz bloß auf egalisierenden Unterricht und egalisierende Prüfungen in einer auf Grundkompetenzen reduzierten gemeinsamen Schule abzielt. Damit habe ich die Frage 3 im Abstract beantwortet – und bin mit dieser Kritik nicht allein, wie die folgenden Aussagen beweisen [L7]:

> „Begabungsschwache Schüler profitieren in keiner Weise von egalisierendem Unterricht.“

Univ.-Prof. Dr. Andreas Helmke, Münchener Studie, *1989*

> „Eine gemeinsame Schule mit demotivierten Lehrern wird eine katastrophal schlechte Schule sein.“

Konrad Paul Liessmann, Kleine Zeitung *vom 4. Dezember 2007*

> „Je nivellierender der Unterricht ist, desto schlechter ist er. Wenn Schule gut ist, dann fördert sie jeden ohne Ausnahme in unterschiedlicher Weise.“

Manfred Spitzer, Der Standard *vom 28. Juni 2010*

Nach all dieser Kritik möchte ich etwas Positives hinzufügen, nämlich dass ich die Forderung des bifie nach einer *verbindlichen Einbeziehung* von (höherwertiger!) Technologie ab 2017/18 als einen längst überfälligen, unverzichtbaren, nichtsdestoweniger mutigen Schritt in die richtige Richtung betrachte. Möge dieser mein Vortrag mitwirken sich (diesmal) rechtzeitig mit *allen* damit zusammenhängenden Problemen zu beschäftigen.

Literatur:

L1: https://www.bifie.at/node/1354) ab S. 77

L2: Götz, Reichel; Müller, Hanisch: Mathematik 8, öbv 2013.

L3: Bruno Buchberger: „Mathematik am Computer: Die nächste Überforderung?“ Vortrag am 7. Österreichischen Mathematikertreffen der ÖMG, Graz 1999

L4: Radetzkyschule, Jahresbericht 2011/12, S. 187

L5: B. Schuppar: Die Leiter – ein beziehungsreiches elementarmathematisches Problem, in IMN, Nr. 222, April 2012, S. 21-32

L6: Mitteilungen der DMV, Band 20, Heft 4, 2012

L7: Briefe der göd.fcg, Ausgaben 1-25, 2010